

Analysis

Aufgabengruppe I

Teil 1

BE

1 Geben Sie zu den Funktionstermen jeweils den maximalen Definitionsbereich an und begründen Sie jeweils anhand des Terms der zweiten Ableitung, dass der zugehörige Graph keine Wendepunkte besitzt.

2 **a)** $f(x) = \ln(x+3)$

3 **b)** $g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

2 Geben Sie jeweils den Term einer in \mathbb{R} definierten Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.

2 **a)** Der Graph der Funktion f hat den Hochpunkt $(0 | 5)$.

2 **b)** Die Funktion g ist an der Stelle $x = 5$ nicht differenzierbar.

3 Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen $f_a : x \mapsto \sin(ax)$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2 **a)** Geben Sie zwei Werte für a so an, dass jeweils alle Nullstellen von f_a ganzzahlig sind.

5 **b)** Nun sei $a = 2$. Berechnen Sie $\int_1^b f_2(x) dx$; dabei ist b die kleinste Nullstelle von f_2 , die größer als 1 ist. Geben Sie einen Wert $c \in \mathbb{R}$ mit $c > b$ an, so dass $\int_1^c f_2(x) dx = \int_1^b f_2(x) dx$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen von f_2 .

4 **4** Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $]-\infty; 5]$ definierten Funktion f . Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f' . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für $f'(0)$, die Nullstelle von f' und das Verhalten von f' für $x \rightarrow 5$.

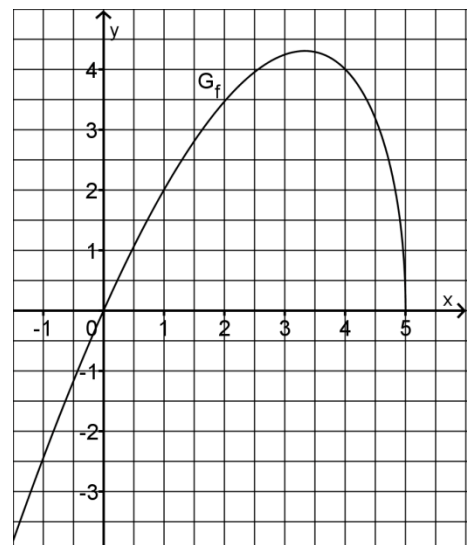


Abb. 1

20

(Fortsetzung nächste Seite)

Teil 2

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{2e^x}{e^x + 9}$ mit Definitionsbereich \mathbb{R} . Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .

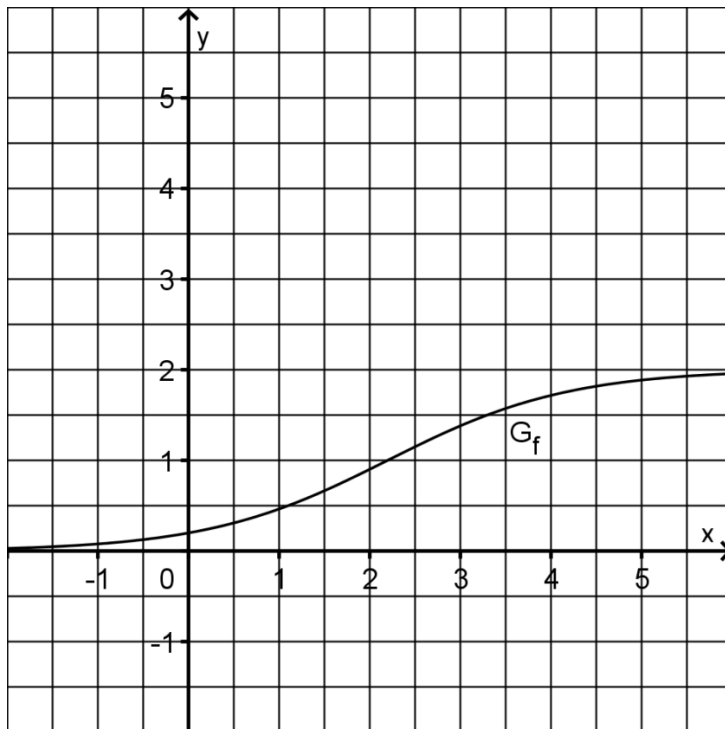


Abb. 2

- 2 **1 a)** Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f genau einen Achsenschnittpunkt S besitzt, und geben Sie die Koordinaten von S an.
- 2 **b)** Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f , dass $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ gilt.
- 2 **c)** Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f in \mathbb{R} streng monoton steigt.
- 5 **d)** Bestimmen Sie mithilfe eines geeignet gewählten Trapezes einen Näherungswert für den Inhalt der Fläche, die von G_f , der x -Achse sowie den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ eingeschlossen wird. Um wie viel Prozent weicht dieser Näherungswert vom exakten Wert des Flächeninhalts ab?
- 6 **e)** Begründen Sie, dass f in \mathbb{R} umkehrbar ist. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in Abbildung 2 ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x \in [0;4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. In den Aufgaben 2a bis 2d werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

- 2 **a)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.
- 5 **b)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells schrittweise und nachvollziehbar, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.
- 6 **c)** Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M , zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie x_M und ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.
- 5 **d)** Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Achsenschnittpunkt S beschreiben lässt. Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in \mathbb{R} definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $k \in \mathbb{R}^+$ besitzt:

$$\text{I } y = \frac{2e^{x+k}}{e^{x+k} + 9} \quad \text{II } y = k \cdot \frac{2e^x}{e^x + 9} \quad \text{III } y = \frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 9}$$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

- 4 **e)** Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.
- 1 **f)** Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.